

КОШКАРБАЕВ НУРБОЛ МАХСЕТБАЕВИЧ

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОДНЫХ ВОЛН

### АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)  
по специальности «6D070500-Математическое и компьютерное  
моделирование»

**Актуальность темы исследования.** Теория поверхностных гравитационных волн является одной из классических областей гидродинамики. Однако моделирование обрушения волн до сих пор представляет собой сложную задачу. Для расчёта обрушения волны в работе С. Хибберда и Д. Перегринна 1979 года был предложен передовой метод, основанный на численном решении нелинейных уравнений мелкой воды в консервативной форме. Хотя этот метод давал физически реалистичные результаты, работа К. Синолакиса 1989 года показала его низкую надёжность на фазе наката волны на берег. Кроме того, важно учитывать, что после обрушения волны значительное количество энергии рассеивается и диссипирует. В связи с этим, в более поздних версиях алгоритма, рассмотренного в работе А. Паквуда и Д. Перегринна 1981 года, были добавлены искусственные диссипативные члены, такие как вязкость и трение, для более точного описания амплитуды волны. Вместо введения подобных искусственных членов, модель, рассматриваемая в данной диссертации, описывает явление обрушения волны путём введения новой физически обоснованной переменной – энтрофии (квадрата завихренности), основываясь на работах Г. Ричарда и С. Гаврилюка 2012 и 2015 годов. Однако, в отличие от вышеупомянутых работ, образование энтрофии связано не с формированием ударной волны, а с турбулентной диссипацией.

Описание динамики водяных волн в среде с подвижной границей в настоящее время является одной из актуальных проблем в области прикладной математики, физики и морской инженерии. Смещение границы, вызванное изменением береговой линии, воздействием гидротехнических сооружений или другими природными и техногенными факторами, усложняет свойства распространения волн. Хотя задачи с подвижными границами встречаются во многих научных областях, их значение особенно велико при моделировании волновых процессов. В этой сфере фундаментальными инструментами являются уравнения Кортевега-де Фриза и Кавахары, описывающие нелинейные и дисперсионные эффекты. Они

широко применяются, например, для моделирования распространения гравитационных волн на мелководье (цунами, волны в каналах), ионно-звуковых волн в плазме и процессов в нелинейной оптике. Подобные исследования способствуют достижению важных практических результатов в области защиты морских побережий, обеспечения навигационной безопасности и проектирования энергетических установок. Поэтому адаптация и исследование уравнений Кавахары и Кортевега-де Фриза для сред с подвижной границей является одним из актуальных научных направлений, нацеленных на понимание сложной природы водяных волн, прогнозирование их поведения и управление ими.

В заключение, математическое моделирование нелинейных волновых процессов является одним из фундаментальных и динамично развивающихся направлений современной математической физики и вычислительных наук. Высокая актуальность выбранной темы исследования подтверждается растущим научным интересом в этой области, особенно к исследованиям, основанным на сложных математических моделях и современных методах. Ярким свидетельством этого можно назвать постоянный рост числа научных публикаций по данной тематике в ведущих международных базах данных, таких как Web of Science, Scopus и MathSciNet.

**Целью диссертационной работы** является исследование аналитических и численных решений в виде бегущей волны при моделировании явлений обрушения волн на мелководье.

Кроме того, целью является анализ закономерностей распространения водяных волн в области с подвижной границей и исследование методов нахождения аналитических и численных решений уравнений Кортевега-де Фриза и Кавахары, используемых для их описания.

**Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие основные задачи исследования:**

- Нахождение аналитического и численного решения в виде бегущей волны при моделировании явлений обрушения волн на мелководье;
- Нахождение численного решения уравнения Кортевега-де Фриза в области с подвижной границей;
- Исследование существования глобального решения уравнения Кавахары в области с подвижной границей;
- Нахождение численного решения уравнения Кавахары в области с подвижной границей.

**Объект исследования.** Нелинейная математическая модель прибрежных волн. Уравнения Кортевега-де Фриза и Кавахары в области с подвижной границей.

**Методы научного исследования.** При решении задач диссертационной работы использовались различные методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и нелинейного анализа. В частности:

Для доказательства существования глобального решения:

- запись уравнений в слабой постановке;
- метод Галёркина;
- получение априорных оценок;
- сходимость слабо ограниченной последовательности приближенных решений;
- доказательство возможности продолжения глобального решения на весь временной интервал.

Для исследования численного решения:

- метод Галёркина;
- метод конечных разностей;
- метод конечных элементов.

**Научная новизна работы.** Исследованные в данной диссертационной работе нелинейная модель прибрежных волн, а также аналитические и численные решения уравнений Кортевега-де Фриза и Кавахары в областях с подвижной границей, являются новыми задачами. Рассматриваемые проблемы в основном не изучены или были представлены лишь для частных случаев. Поэтому данная исследовательская работа нацелена на расширение ранее известных результатов и получение новых.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Тема исследования является в основном теоретической и фундаментальной, а её научная значимость связана с применением глубоких, современных результатов теории гидродинамики и математической физики, а также с созданием новых оригинальных методов исследования и анализа.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 7 работ, в том числе 2 публикация в рейтинговых научных журналах, индексируемый в базе данных Web of Science и Scopus, 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованные Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 3 публикации в материалах зарубежной международной научной конференции.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 N. Koshkarbayev. Travelling breaking waves // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2023, - Vol. 16, No. 2, - P. 49–58. DOI: 10.14529/mmp230205. Scopus SJR=0.245(Q3), CiteScore=0,9, Scopus Percentile=25.

2 N. Koshkarbayev. Blowing-up solutions of the shallow water equations // Journal of Nonlinear Modeling and Analysis, 2025, - Vol. 7, No. 4, -P. 1523-1531., DOI:10.12150/jnma.2025.1523. Scopus SJR=0.322(Q2), CiteScore=1,5, Scopus Percentile=56.

## ККСОН

1 N. Koshkarbayev, B. T. Torebek. Nonexistence of travelling wave solution of the Korteweg-de Vries Benjamin Bona Mahony equation // International Journal of Mathematics and Physics, 2019, - Vol. 10, No. 1 – P. 51-55.

2 N. Koshkarbayev, B. T. Torebek. Blowing-up solutions of the shallow water equations // Kazakh Mathematical Journal. - 2019, - Vol. 19, No. 2, pp. 70–77.

3 N. Koshkarbayev, B. T. Torebek. About a singular travelling wave solution of the KDV-BBM equation // Вестник КазННТУ. 2019, -Vol 6, pp. 644-649.

## Публикации в материалах международных конференций

1 N. Koshkarbayev, B. T. Torebek. On a mathematical model of breaking travelling waves // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова. "Математические проблемы механики сплошных сред" 13-17 мая, - 2019. - P. 263.

2 N. Koshkarbayev, Kawahara equation in domains with moving boundaries // Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. Almaty, April 10, - 2025. - P. 224-225.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключение и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 112 страниц. Список литературы состоит из 62 наименований.

**Основное содержание диссертации.** В первой главе рассматривается следующая система модели разрушенных волн на мелководье:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hU^2 + \frac{gh^2}{2} + h^3\varphi + \frac{h^2\ddot{h}}{3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4}{\text{Re}} h^3 \sqrt{\varphi} \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h\varphi}{\partial t} + \frac{\partial hU\varphi}{\partial x} = \frac{8h\sqrt{\varphi}}{\text{Re}} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - C_r h\varphi^{3/2} \end{cases} \quad (0.1)$$

где  $h$  - глубина воды,  $U$  - усредненная по глубине горизонтальная скорость,  $g$  - постоянная силы тяжести и  $\varphi$  - переменная энтропии. Система зависит от двух параметров:  $Re$  – число Рейнольдса и  $C_r$  – параметр турбулентной диссипации. В системе (0.1) первое уравнение представляет собой закон сохранения массы, второе – закон сохранения импульса, а третье – уравнение для энтропии. Исследуются нахождение решения данной системы в виде бегущей волны, доказательство существования этого решения, а также определение критического значения  $Re_{cr}$  и обоснование его физико-инженерных последствий.

Во второй главе мы рассматриваем следующую нелинейную начально-краевую задачу, основанную на классическом уравнении Кортевега-де Фриза:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}\mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} = 0, & (\xi, \tau) \in Q_\tau, \\ \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) = \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = 0, \\ \mathcal{G}_\xi(\beta(\tau), \tau) = 0, & \tau \in [0, T], \\ \mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), & \xi \in D_0 \end{cases} \quad (0.2)$$

где  $Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$  область с подвижной границей, а ее граница  $D_\tau = \{\xi \in R \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), \tau > 0\}$ . Исследуются доказательство существования решения системы (0.2) и нахождение её численного решения.

В третьей главе мы рассматриваем следующую нелинейную начально-краевую задачу, основанную на классическом уравнении Кавахары:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}\mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} - \mathcal{G}_{\xi\xi\xi\xi\xi} = 0, & (\xi, \tau) \in Q_\tau, \\ \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) = \phi_1, \quad \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = \phi_2, \\ \mathcal{G}_\xi(\alpha(\tau), \tau) = \phi_3, \quad \mathcal{G}_\xi(\beta(\tau), \tau) = \phi_4, \\ \mathcal{G}_{\xi\xi}(\beta(\tau), \tau) = \phi_5, & \tau \in [0, T], \\ \mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), & \xi \in D_0. \end{cases} \quad (0.3)$$

Исследуются доказательство существования решения системы (0.3) и нахождение численного решения задачи для системы (0.3) с однородными граничными условиями.